The Weekly Rigor

No. 240 "A mathematician is a machine for turning coffee into theorems." January 26, 2019

39 Problems in Natural-Log Expansions

(Part 2)

ANSWERS

1. $4\ln(3x-7)+3\ln(8x^2-1)$	2. $\frac{2}{5}\ln(x)+\ln(x^2+8)+x^2+x$
3. $4\ln(x+1)+3\ln(x-5)-8\ln(x-3)$	4. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$
5. $x\ln(x)$	6. $\frac{1}{x}\ln(x)$
7. $\sin(x)\ln(x)$	8. $x\ln(\sin(x))$
9. $x\ln(\ln(x))$	10. $\ln(x)\ln(x)$
11. $\ln(2)+2x\ln(x)$	12. $\ln(5)+5x\ln(x)$
13. $\ln(3)+3x\ln(x)$	14. $\ln(4)+x^4\ln(x)$
15. $3\ln(3x^4+4)+\frac{1}{2}\ln(5x^3+1)$	16. $2\ln(x^5+5)+\frac{1}{2}\ln(2x^2+3)$
17. $5\ln(3x^4-2)-2\ln(3x^3+4)$	18. $\frac{1}{2}\ln(3x^2+1)+3\ln(3x^4+1)$
19. $\frac{1}{2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)$	20. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln(x-1)$
21. $\frac{1}{2}\ln(t)-\frac{1}{2}\ln(t+1)$	22. $-\frac{1}{2}\ln(t)-\frac{1}{2}\ln(t+1)$
23. $-\ln(t)-\ln(t+1)-\ln(t+2)$	24. $\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{2}{3}\ln(x+1)$
25. $5\ln(x+1)-\frac{5}{2}\ln(2x+1)$	26. $x\ln(x+1)$
27. $x\ln(x)+\ln(x)$	28. $\frac{1}{2}t\ln(t)$
29. $t^{\frac{1}{2}}\ln(t)$	30. $nt\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)$
31. $\frac{1}{2}\ln(\theta)-\ln\left(1+\theta^{\frac{1}{2}}\right)$	32. $2\ln(K)+\ln(L)-\ln(M+1)$
33. $2\ln(K)+\ln(L)-\ln(M)-\ln(N)$	34. $3\ln(x)+4\ln(y)+\frac{1}{2}\ln(z+5)$
35. $\ln(x)+2\ln(3-x^5)-\frac{1}{3}\ln(5+3x^4)$	36. $2\ln(\sin(x))+\ln(\cos(x))-5\ln(x)$
37. $\ln(\sin(2x))+\ln(\cos(5x))+3\ln(\tan(7x))-2\ln(\cos(3x))$	
38. $x\ln(\sin(x))$	39. $x\ln\left(a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}\right)-x\ln(2)$

SELECTED SOLUTIONS

1. $\ln(3x-7)^4(8x^2-1)^3 = \ln(3x-7)^4 + \ln(8x^2-1)^3 = 4\ln(3x-7) + 3\ln(8x^2-1).$

5. $\ln(x^x) = x\ln(x).$

9. $\ln((\ln x)^x) = x\ln(\ln(x)).$

13. $\ln\left(3x^{3x}\right) = \ln(3) + \ln(x^{3x}) = \ln(3) + 3x\ln(x).$

19. $\ln\left(\sqrt{x(x+1)}\right) = \ln\left[\left(x(x+1)\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\ln\left(x(x+1)\right) = \frac{1}{2}[\ln(x) + \ln(x+1)] =$
$= \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1).$

21. $\ln\sqrt{\frac{t}{t+1}} = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) = \frac{1}{2}[\ln(t) - \ln(t+1)] = \frac{1}{2}\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t+1).$

23. $\ln\frac{1}{t(t+1)(t+2)} = \ln(1) - \ln[t(t+1)(t+2)] = \ln(1) - [\ln(t) + \ln(t+1) + \ln(t+2)] =$
$= 0 - \ln(t) - \ln(t+1) - \ln(t+2) = -\ln(t) - \ln(t+1) - \ln(t+2).$

25. $\ln\left(\sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}\right) = \ln\left(\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}\right) = \frac{1}{2}[\ln(x+1)^{10} - \ln(2x+1)^5] =$
$= \frac{1}{2}[10\ln(x+1) - 5\ln(2x+1)] = 5\ln(x+1) - \frac{5}{2}\ln(2x+1).$

27. $\ln\left(x^{(x+1)}\right) = (x+1)\ln(x) = x\ln(x) + \ln(x).$

29. $\ln t^{\sqrt{t}} = \ln t^{t^{\frac{1}{2}}} = t^{\frac{1}{2}}\ln(t).$

33. $\ln\left(\frac{K^2L}{M\cdot N}\right) = \ln(K^2L) - \ln(M\cdot N) = \ln(K^2) + \ln(L) - [\ln(M) + \ln(N)] =$
$= \ln(K^2) + \ln(L) - \ln(M) - \ln(N) = 2\ln(K) + \ln(L) - \ln(M) - \ln(N).$

37. $\ln\frac{\sin(2x)\cos(5x)\tan^3(7x)}{\cos^2(3x)} = \ln\left[\sin(2x)\cos(5x)\tan^3(7x)\right] - \ln\left[\cos^2(3x)\right] =$
$= \ln\sin(2x) + \ln\cos(5x) + \ln\tan^3(7x) - \ln\cos^2(3x) =$
$= \ln\sin(2x) + \ln\cos(5x) + \ln(\tan(7x))^3 - \ln(\cos(3x))^2 =$
$= \ln(\sin(2x)) + \ln(\cos(5x)) + 3\ln(\tan(7x)) - 2\ln(\cos(3x)).$

39. $\ln\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^x = x\ln\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right) = x\left[\ln\left(\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}\right) - \ln(2)\right] = x\ln\left(a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}\right) - x\ln(2).$